

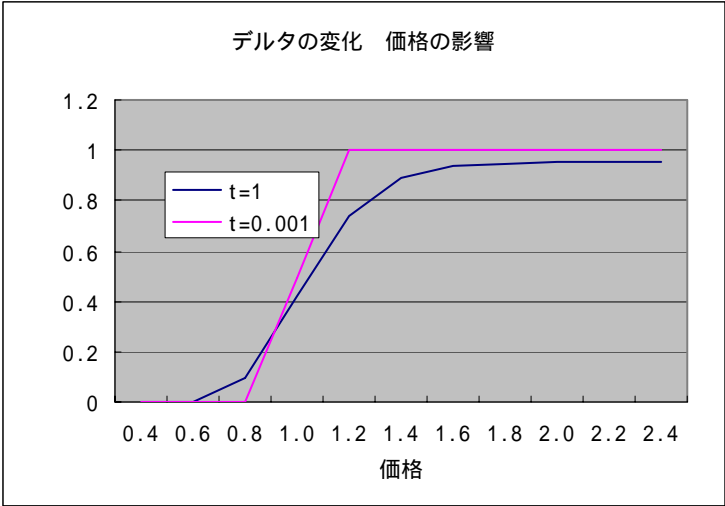
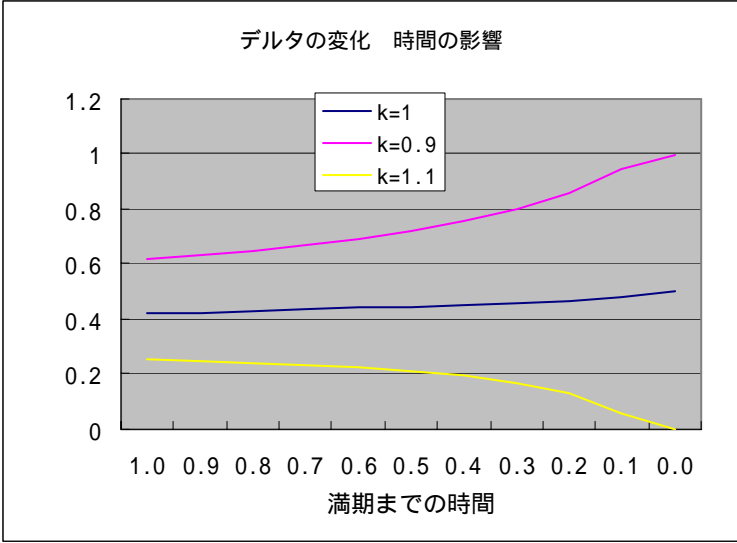
## 基本的ヘッジ戦略 - ヘッジ

オプションの価値に影響を与える変数、 $s$ 、 $v$ 、 $r$ 、 $t$ が変化したときにオプションの価値が変化するが、この変化を相殺するようなポジションを持っていればオプションのポジションをヘッジすることができる。オプションの価値に最も敏感に影響するのは株価の推移であるので、オプションの価値が値動きによってどれくらい変化するかがヘッジの要となる。この量はデルタと呼ばれ、デルタを用いたヘッジをデルタヘッジという。デルタはBSモデルを株価の1次偏微分を取ることでより得られ、微小時間における株価の変化がどのようにオプションの価値に影響を与えるかを示す数値である。デルタは

$$\text{コールオプション} : \Delta = \frac{\Delta C}{\Delta S} = N(d)$$

$$\text{プットオプション} : \Delta = \frac{\Delta P}{\Delta S} = N(d) - 1$$

である。コールオプションの買いのポジションを持っていれば、株価が上昇すれば利益が得られるが下落すれば購入時に払ったプレミアムを失うことになる。このリスクを回避するためにはデルタ分だけの株式を売ればよい。ただし、このヘッジを行うと、当然のことながら、株価が大きく上昇したときの利益は失われる。より正確に表現すると、ボラティリティと金利が一定で変化せずに、市場がBSモデルのすべての条件を満たせば、ヘッジのポジションからは株価が行使価格よりも高いときには本源的価値に相当する損失とプレミアムとプレミアムに対する無リスク金利分の収益が得られ、株価が行使価格よりも低ければプレミアムとプレミアムに対する無リスク金利分の収益が得られる。ヘッジ損益とコールオプションの買いポジションからの収入を足し合わせれば、最終的にプレミアムとそのプレミアムが生み出す無リスク金利が得られる。別の言い方をすれば、コールオプションを買い、そしてヘッジを行えばプレミアムを無リスク金利に投資したのと同じ収益が得られるのである。以下の図はデルタの変化を価格の変化と時間の変化に対してプロットしたものである。



次の表は時間の経過に対して価格が変化していく場合のデルタの推移を表したものであるが、これをもとにヘッジを考えてみよう。ボラティリティを0.2、金利をゼロと仮定している。Tは満期までの時間である。コールオプションの買いポジションに対してデルタヘッジを行っている。sは株価である。時間の経過によって株価が推移している。コールの価値はその時点での株価と満期までの時間を下にBSモデルから計算したオプションの価値である。デルタはそのときのオプションのデルタである。売りと買いの欄はデルタをゼロにするために株式を売買する行為である。コールの最初のデル

タは0.54であるので、0.54の株式を売却している。損益はヘッジのポジションから得られた損益である。ポートフォリオの価値はその損益とオプションの価値を足し合わせたものである。最後に誤差は最初に払ったプレミアムとの差である。

t	s	コールの 価値	デルタヘッジのオペレーション			損益	ポートフォリオ の価値	ヘッジ誤差
			売り	買い				
1.0	1.000	7.87%	0.54	0.54		-0.54		
0.9	1.061	11.12%	0.66	0.12	0.00	-0.66	-3.29%	7.83%
0.8	1.000	7.04%	0.54	0.00	0.12	-0.54	0.73%	7.77%
0.7	1.061	10.27%	0.67	0.14	0.00	-0.67	-2.53%	7.73%
0.6	1.000	6.10%	0.53	0.00	0.14	-0.53	1.55%	7.65%
0.5	1.061	9.29%	0.69	0.16	0.00	-0.69	-1.68%	7.61%
0.4	1.000	4.98%	0.52	0.00	0.16	-0.52	2.52%	7.50%
0.3	1.061	8.14%	0.73	0.20	0.00	-0.73	-0.68%	7.47%
0.2	1.000	3.52%	0.52	0.00	0.21	-0.52	3.75%	7.27%
0.1	1.061	6.69%	0.84	0.32	0.00	-0.84	0.59%	7.28%
0.0	1.000	0.00%	0.50	0.00	0.34	-0.50	5.70%	5.70%
ボラティリティ		20%						

この株価の動きはボラティリティがほぼ20%の場合である。ヘッジの誤差は約-2%である。ヘッジをしたことにより損失となっているが、決して悪い成績ではない。正確ではないにしてもヘッジの役割は果たされている。

デルタヘッジがどのような意味を持っているかをもう少し考えてみよう。デルタヘッジがオプションのポジションを相殺していることから、デルタヘッジはオプションが買いポジションの場合にはそのオプションの売りのポジションを複製し、またオプションが売りのポジションの場合には買いのポジションを複製していることになる。つまり、このデルタと同じ量の株式を購入すればコールオプションの買いポジションを複製することができる。

### オプション複製戦略

BSモデルのデルタを用いてオプションを複製できることが分かった。コールオプションではデルタは価格が上がると大きくなり、価格が下がると小さくなる性質がある。そのため、オプションを複製する行為は価格の上昇に伴い株式を購入し、下落に伴い売却するトレンドフォロー型の売買取引となる。オプションの複製はデルタヘッジと原理は同じであるがそのパフォーマンスを理解する際に本源的価値と時間的価値に分けて考えると理解しやすい。本源的価値と実際の複製により得られる収益の差が複製費用となる。ブラック＝ショールズのモデルを用いて複製する場合オプションの収益率から本源的価値を差し引くと時間的価値が得られる。この時間的価値と複製費用を比べることで複製のエ

ラーを得ることができる。この複製のエラーはBSモデルどおりの複製ができていないかどうかの目安になる数値である。

0.061		オプション複製のオペレーション 1									
t	s	目標ペイ オフ A	売り	買い	損益 B	B-A	コールの価 値	コールオ プション の収益率 C	A-C	複製エラー	
1.0	1.000	0.00%	0.54	0.54	0.54		7.87%	0.00%			
0.9	1.061	6.10%	0.66	0.12	0.66	3.29%	11.12%	3.25%	-2.85%	0.04%	
0.8	1.000	0.00%	0.54	0.12	0.54	-0.73%	7.04%	-0.83%	-0.83%	0.10%	
0.7	1.061	6.10%	0.67	0.14	0.67	2.53%	10.27%	2.40%	-3.70%	0.14%	
0.6	1.000	0.00%	0.53	0.14	0.53	-1.55%	6.10%	-1.77%	-1.77%	0.21%	
0.5	1.061	6.10%	0.69	0.16	0.69	1.68%	9.29%	1.43%	-4.67%	0.25%	
0.4	1.000	0.00%	0.52	0.16	0.52	-2.52%	4.98%	-2.89%	-2.89%	0.36%	
0.3	1.061	6.10%	0.73	0.20	0.73	0.68%	8.14%	0.28%	-5.82%	0.40%	
0.2	1.000	0.00%	0.52	0.21	0.52	-3.75%	3.52%	-4.34%	-4.34%	0.59%	
0.1	1.061	6.10%	0.84	0.32	0.84	-0.59%	6.69%	-1.18%	-7.28%	0.58%	
0.0	1.000	0.00%	0.50	0.34	0.50	-5.70%	0.00%	-7.87%	-7.87%	2.17%	
ボラティリティ		20%									

上の表にある値動きは単調に上下動を繰り返す場合である。最終的な複製エラーは2.17%で予定よりも安くオプションを複製できたことを示している。

次に若干値動きの違う場合を見てみよう。複製期間を1年としその期間の初めに大きな値動きとその後半に大きな値動きがあった場合である。どちらも期間ボラティリティは同じである。複製エラーに大きな違いがあることが分かる。BSモデルを用いたオプション複製は経路依存型であると言うが、まさしく同じボラティリティであっても複製の費用には違いが生じるのである。値動きの動き方も同じで違いは複製期間のどこで特定の値動きが起きたかである。このような複製費用の違いはデルタの動き方から来るのである。

0.06 オプション複製のオペレーション 2												
t	s	目標ペイ オフ A	売り	買い	損益 B	B-A	コールの価 値	コールオ プション の収益率 C	A-C	複製エラー		
1.0	1.000	0.00%	0.54	0.54	0.54		8.10%	0.00%				
0.9	1.060	6.00%	0.65	0.00	0.11	0.65	3.24%	-2.76%	11.28%	3.17%	-2.83%	0.07%
0.8	1.191	19.10%	0.85	0.00	0.20	0.85	11.82%	-7.28%	20.88%	12.78%	-6.33%	-0.95%
0.7	1.402	40.21%	0.98	0.00	0.13	0.98	29.84%	-10.37%	40.39%	32.28%	-7.93%	-2.45%
0.6	1.402	40.21%	0.99	0.00	0.01	0.99	29.84%	-10.37%	40.31%	32.21%	-8.00%	-2.37%
0.5	1.402	40.21%	0.99	0.00	0.01	0.99	29.84%	-10.37%	40.26%	32.16%	-8.05%	-2.32%
0.4	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	29.84%	-10.37%	40.23%	32.13%	-8.08%	-2.29%
0.3	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	29.84%	-10.37%	40.21%	32.11%	-8.10%	-2.27%
0.2	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	29.84%	-10.37%	40.21%	32.10%	-8.10%	-2.27%
0.1	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	29.84%	-10.37%	40.21%	32.10%	-8.10%	-2.27%
0.0	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	29.84%	-10.37%	40.21%	32.10%	-8.10%	-2.27%
ボラティリティ		20%										

0.06 オプション複製のオペレーション 3												
t	s	目標ペイ オフ A	売り	買い	損益 B	B-A	コールの価 値	コールオ プション の収益率 C	A-C	複製エラー		
1.0	1.000	0.00%	0.54	0.54	0.54		8.10%	0.00%				
0.9	1.000	0.00%	0.54	0.00	0.00	0.54	0.00%	0.00%	7.69%	-0.41%	-0.41%	0.41%
0.8	1.000	0.00%	0.54	0.00	0.00	0.54	0.00%	0.00%	7.25%	-0.85%	-0.85%	0.85%
0.7	1.000	0.00%	0.53	0.00	0.00	0.53	0.00%	0.00%	6.78%	-1.32%	-1.32%	1.32%
0.6	1.000	0.00%	0.53	0.00	0.00	0.53	0.00%	0.00%	6.28%	-1.82%	-1.82%	1.82%
0.5	1.000	0.00%	0.53	0.00	0.00	0.53	0.00%	0.00%	5.74%	-2.37%	-2.37%	2.37%
0.4	1.000	0.00%	0.53	0.00	0.00	0.53	0.00%	0.00%	5.13%	-2.97%	-2.97%	2.97%
0.3	1.000	0.00%	0.52	0.00	0.00	0.52	0.00%	0.00%	4.44%	-3.66%	-3.66%	3.66%
0.2	1.060	6.00%	0.75	0.00	0.23	0.75	3.13%	-2.87%	7.48%	-0.63%	-6.63%	3.76%
0.1	1.191	19.10%	1.00	0.00	0.24	1.00	13.01%	-6.10%	19.11%	11.00%	-8.10%	2.00%
0.0	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	34.05%	-6.16%	40.21%	32.10%	-8.10%	1.95%
ボラティリティ		20%										

デルタの動きは満期から離れていると単位あたりの価格の変化に対するデルタの変化は小さく、この値は満期が近くなるに従って大きくなる。そのため大きな値動きが複製期間の始めに起こるとトレンドに乗り遅れてしまい、複製のパフォーマンスが悪くなるのである。

次の例はさらに極端な例であり、期間ボラティリティは同じように20%であるが、価格は1度だけしか動いていない。このような場合にも複製エラーが生じる。

0.06		オプション複製のオペレーション 4									
t	s	目標ペイ オフ A	売り	買い	損益 B	B-A	コールの価 値	コールオ プション の収益率 C	A-C	複製エラー	
1.0	1.000	0.00%	0.54	0.54	0.54		8.10%	0.00%			
0.9	1.000	0.00%	0.54	0.00	0.00	0.54	7.69%	-0.41%	-0.41%	0.41%	
0.8	1.000	0.00%	0.54	0.00	0.00	0.54	7.25%	-0.85%	-0.85%	0.85%	
0.7	1.000	0.00%	0.53	0.00	0.00	0.53	6.78%	-1.32%	-1.32%	1.32%	
0.6	1.000	0.00%	0.53	0.00	0.00	0.53	6.28%	-1.82%	-1.82%	1.82%	
0.5	1.000	0.00%	0.53	0.00	0.00	0.53	5.74%	-2.37%	-2.37%	2.37%	
0.4	1.198	19.80%	0.93	0.00	0.40	0.93	10.47%	12.21%	-7.59%	-1.74%	
0.3	1.198	19.80%	0.95	0.00	0.02	0.95	10.47%	11.96%	-7.83%	-1.50%	
0.2	1.198	19.80%	0.98	0.00	0.03	0.98	10.47%	11.78%	-8.02%	-1.32%	
0.1	1.198	19.80%	1.00	0.00	0.02	1.00	10.47%	11.70%	-8.10%	-1.23%	
0.0	1.198	19.80%	1.00	0.00	0.00	1.00	10.47%	11.69%	-8.10%	-1.23%	
ボラティリティ		20%									

さて、このシミュレーションでは金利とボラティリティが一定であるので、BSモデルの多くの仮定を満たしている。証券は自由に分割可能であるので、デルタの調節を理論値とまったく同じものに調整でき、取引費用もかからないので、その分の余分な複製費用も必要ない。金利はゼロに設定してあるので、資金の貸し借り、割引の問題も生じない。現実離れしているが、モデルが想定する世界にかなり近い。唯一の違いは連続して取引されていないことである。

実際のオプションの複製を想像してみると、金利とボラティリティの予測が必要になる。一般的には過去の価格の動きからボラティリティを計算し、それをヒストリカルボラティリティと呼ぶ。金利の動きに対しても同じようなことを行わなくてはならない。このシミュレーションでは金利をゼロとしてあるので、その仮定は維持し、ボラティリティの予測を誤った場合を実験してみよう。価格の推移のシナリオはオプションの複製1, 2, 3と同じ物を使う。平均して価格が上下する場合(シナリオ1) 複製期間の最初に値動きが起こるもの(シナリオ2) そして値動きが複製期間の後半に起こる場合(シナリオ3) について議論する。これらの値動きのボラティリティは20%とする。そしてボラティリティの予測値は10%とする。

結果は以下のとおりであり、シナリオ1では複製費用は9.72%となりかなりの損失である。ボラティリティを正確に20%と予測したときの複製費用5.7%をかなり上回っている。これはまさしく理論から理解されるようにボラティリティの予測の失敗は複製費用に悪い影響を与える。

シナリオ2と3については意外な結果が得られる。シナリオ2の結果は6.69%、そしてシナリオ3の場合は複製費用が4.15%になる。これは以外にもボラティリティを正確に予測した場合、10.37%、6.13%よりはるかによい結果が出るのである。

0.061 オプション複製のオペレーション ボラティリティの予測に失敗 1												
t	s	目標ペイ オフ A	売り	買い	損益 B	B-A	コールの価 値	コールオ プション の収益率 C	A-C	複製エラー		
1.0	1.000	0.00%	0.52	0.52	0.52		7.87%	0.00%				
0.9	1.061	6.10%	0.75	0.00	0.23	0.75	3.17%	-2.93%	11.12%	3.25%	-2.85%	-0.08%
0.8	1.000	0.00%	0.52	0.23	0.00	0.52	-1.40%	-1.40%	9.43%	1.57%	1.57%	-2.96%
0.7	1.061	6.10%	0.77	0.00	0.26	0.77	1.76%	-4.34%	10.87%	3.01%	-3.09%	-1.25%
0.6	1.000	0.00%	0.52	0.26	0.00	0.52	-2.96%	-2.96%	6.68%	-1.19%	-1.19%	-1.77%
0.5	1.061	6.10%	0.81	0.00	0.29	0.81	0.19%	-5.91%	9.50%	1.63%	-4.47%	-1.44%
0.4	1.000	0.00%	0.51	0.30	0.00	0.51	-4.74%	-4.74%	5.17%	-2.69%	-2.69%	-2.05%
0.3	1.061	6.10%	0.87	0.00	0.35	0.87	-1.62%	-7.72%	8.20%	0.33%	-5.77%	-1.95%
0.2	1.000	0.00%	0.51	0.36	0.00	0.51	-6.90%	-6.90%	3.57%	-4.29%	-4.29%	-2.61%
0.1	1.061	6.10%	0.97	0.00	0.46	0.97	-3.80%	-9.90%	6.69%	-1.18%	-7.28%	-2.62%
0.0	1.000	0.00%	0.50	0.47	0.00	0.50	-9.72%	-9.72%	0.00%	-7.87%	-7.87%	-1.85%
ボラティリティ		20%										

0.06 オプション複製のオペレーション ボラティリティの予測に失敗 2												
t	s	目標ペイ オフ A	売り	買い	損益 B	B-A	コールの価 値	コールオ プション の収益率 C	A-C	複製エラー		
1.0	1.000	0.00%	0.52	0.52	0.52		8.10%	0.00%				
0.9	1.060	6.00%	0.75	0.00	0.23	0.75	3.12%	-2.88%	11.28%	3.17%	-2.83%	-0.05%
0.8	1.191	19.10%	0.98	0.00	0.23	0.98	12.89%	-6.21%	20.88%	12.78%	-6.33%	0.12%
0.7	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.02	1.00	33.52%	-6.69%	40.39%	32.28%	-7.93%	1.24%
0.6	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	33.52%	-6.69%	40.31%	32.21%	-8.00%	1.31%
0.5	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	33.52%	-6.69%	40.26%	32.16%	-8.05%	1.36%
0.4	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	33.52%	-6.69%	40.23%	32.13%	-8.08%	1.39%
0.3	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	33.52%	-6.69%	40.21%	32.11%	-8.10%	1.41%
0.2	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	33.52%	-6.69%	40.21%	32.10%	-8.10%	1.41%
0.1	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	33.52%	-6.69%	40.21%	32.10%	-8.10%	1.41%
0.0	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	33.52%	-6.69%	40.21%	32.10%	-8.10%	1.41%
ボラティリティ		20%										

0.06 オプション複製のオペレーション ボラティリティの予測に失敗 3												
t	s	目標ペイ オフ A	売り	買い	損益 B	B-A	コールの価 値	コールオ プション の収益率 C	A-C	複製エラー		
1.0	1.000	0.00%	0.52	0.52	0.52		8.10%	0.00%				
0.9	1.000	0.00%	0.52	0.00	0.00	0.52	7.69%	-0.41%	-0.41%	0.41%		
0.8	1.000	0.00%	0.52	0.00	0.00	0.52	7.25%	-0.85%	-0.85%	0.85%		
0.7	1.000	0.00%	0.52	0.00	0.00	0.52	6.78%	-1.32%	-1.32%	1.32%		
0.6	1.000	0.00%	0.52	0.00	0.00	0.52	6.28%	-1.82%	-1.82%	1.82%		
0.5	1.000	0.00%	0.51	0.00	0.00	0.51	5.74%	-2.37%	-2.37%	2.37%		
0.4	1.000	0.00%	0.51	0.00	0.00	0.51	5.13%	-2.97%	-2.97%	2.97%		
0.3	1.000	0.00%	0.51	0.00	0.00	0.51	4.44%	-3.66%	-3.66%	3.66%		
0.2	1.060	6.00%	0.91	0.00	0.40	0.91	3.07%	-2.93%	-6.63%	3.69%		
0.1	1.191	19.10%	1.00	0.00	0.09	1.00	14.95%	-4.15%	-8.10%	3.95%		
0.0	1.402	40.21%	1.00	0.00	0.00	1.00	36.06%	-4.15%	-8.10%	3.96%		
ボラティリティ		20%										

これは同じ期間ボラティリティであっても、値動きのタイミングに複製の費用が大きく影響を受けることを意味している。デルタの価格変化に対する感応度をガンマと呼びBSモデルを価格について2回微分することで得ることができる。また、デルタを価格について一回微分することでも得ることができる。このガンマは価格の動き、時間の動きに対して一定ではなく、複雑な動きをする。それはデルタが時間と価格の動きに対して複雑に動くことを説明していることになる。このデルタとガンマの動きに対して価格がうまく動くとも複製費用は安くなり、また、この動きに逆行すると複製費用は高くなるのである。

コールオプション：
$$\Gamma = \frac{\delta^2 C}{\delta S^2} = \frac{N'(d)e^{-rT}}{S\sigma\sqrt{T}}$$

プットオプション：
$$\Gamma = \frac{\delta^2 P}{\delta S^2} = \frac{N'(d)e^{-rT}}{S\sigma\sqrt{T}}$$

この原因を考えてみよう。BSモデルの仮定をもう一度詳しく見てみると、ボラティリティが一定という意味は複製期間のボラティリティが全体で一定ということではない。つねに一定ということを行っているのである。つまりそれぞれのシナリオで10回の価格の推移が想定されているが、1番目と2番目、2番目と3番目、といふように1期間のボラティリティが一定して20%でなければならない。次に、2期間のボラティリティ、つまり1番目と3番目の値動き、3番目と6番目のボラティリティもやはり一定であり、かつ1期間のボラティリティと同じでなければならない。これがすべての期間ボラティリティにかんしてなりたなければならないのである。これが成り立たないのであれば、BSのモデルによるデルタヘッジは理論どおりに機能しないのである。



ということはシナリオ1, 2, 3の結果は意味がないのであろうか？そうではない。ここでは価格のシナリオを非常に単純化して動かしている。連続した正規分布であっても価格は大きく動くときと、小さく動くときがあるのである。ただし、正規分布では価格が大きく動くことはまれな事象であり、小さく動くことが頻繁に起こるだけである。ボラティリティがあらゆる時間枠で一定であったとしてもそこには大きく価格が動くことがあり、BSモデルを用いたオプション複製では価格の動き、タイミングで複製の費用が決まるということである。